# Parametrizzazione del Gruppo Ortogonale Speciale

*Di Anselmo Canfora*

## 1. Introduzione

Scopo di questa breve trattazione è dare una descrizione esaustiva della struttura delle rotazioni in $R^n$ mediante una particolare parametrizzazione di $SO_n(R)$ definita ricorsivamente.
Tale lavoro permetterà di dimostrare che $SO_n(R)$ è fibrato in sfere, dando contemporaneamente una sua decomposizione in rotazioni piane che generalizza ad una dimensione qualunque il teorema di Eulero su $SO_3(R)$.

## 2. Le funzioni vettoriali

### 2.1. Definizione ricorsiva delle funzioni

Definiamo ora le funzioni $\vec{\sigma}^n : [0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-1} \to S^n \subset R^{n+1}$.
Gli $n$ parametri di $\vec{\sigma}^n$ saranno denotati con i simboli $\alpha_1^n, \alpha_2^n, ..., \alpha_n^n$.
Queste notazioni si riveleranno molto utili nel seguito, quando si farà un uso combinato di $\vec{\sigma}^1,...,\vec{\sigma}^{n-1}$ per descrivere $SO_n(R)$.
Occasionalmente, nelle dimostrazioni date per induzione, $\vec{\sigma}^{n-1}$ potrà avere come parametri $\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n$ invece di $\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}$.
Definiamo innanzi tutto $\vec{\sigma}^1 : [0,2\pi] \to S^1 \subset R^2$ nel modo seguente:

$\vec{\sigma}^1(\alpha_1^1) = \begin{pmatrix} \sigma_1^1(\alpha_1^1) \\ \sigma_2^1(\alpha_1^1) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} sen\alpha_1^1 \\ cos\alpha_1^1 \end{pmatrix}$; è immediato verificare che $\vec{\sigma}^1$ parametrizza $S^1$.

Definiamo ora $\vec{\sigma}^n$ per induzione: $\sigma_k^n := \sigma_k^{n-1}(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n) sen\alpha_n^n$ per $k \le n$ e

$\sigma_{n+1}^n := cos\alpha_n^n$.

Così ad esempio $\vec{\sigma}^2(\alpha_1^2, \alpha_2^2) = \begin{pmatrix} sen\alpha_1^2 \, sen\alpha_2^2 \\ cos\alpha_1^2 \, sen\alpha_2^2 \\ cos\alpha_2^2 \end{pmatrix}$ e

$$\vec{\sigma}^3(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3) = \begin{pmatrix} sen\alpha_1^3 \, sen\alpha_2^3 \, sen\alpha_3^3 \\ cos\alpha_1^3 \, sen\alpha_2^3 \, sen\alpha_3^3 \\ cos\alpha_2^3 \, sen\alpha_3^3 \\ cos\alpha_3^3 \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Suriettività

Dimostriamo ora che $\vec{\sigma}^n$ ha per immagine $S^n$.
Innanzi tutto facciamo vedere come l'immagine di $\vec{\sigma}^n$ sia contenuta in $S^n$.
Sia per ipotesi induttiva $\left\|\vec{\sigma}^{n-1}\right\| = 1$ in $R^n$, dunque in virtù della definizione ricorsiva di $\vec{\sigma}^n$ si ha:

$$\left\|\vec{\sigma}^n\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\sigma_k^n\left(\alpha_1^n,...,\alpha_n^n\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right)sen\alpha_n^n\right)^2 + cos^2\alpha_n^n = \left\|\vec{\sigma}^{n-1}\right\|^2 sen^2\alpha_n^n + cos^2\alpha_n^n = 1$$

Sia $\vec{x} \in S^n \subset R^{n+1}$, facciamo notare come il vettore formato dalle prime $n$ componenti di $\vec{x} = {}^t\left(x_1\ x_2\ ...x_{n+1}\right)$ appartenga a $\left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)S^{n-1}$ ove:
$\left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)S^{n-1} := \left\{\left(\vec{x} \in R^n\right) : \left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{1-x_{n+1}^2}\right\}$, in pratica ${}^t\left(x_1,...,x_n\right)$ appartiene alla $(n-1)$sfera intersezione fra $S^n$ e l'iperpiano ortogonale a $\mathbf{e}_{n+1}$ situato alla "quota" $x_{n+1}$.
Ora, la funzione $\vec{\sigma}^{n-1}$ parametrizza $S^{n-1}$ ed è suriettiva su di essa per ipotesi induttiva, allora $\exists\left\{\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right\}$ tali che $\left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)\vec{\sigma}^{n-1}\left(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right) = {}^t\left(x_1\ ...x_n\right)$.
Ora essendo $-1 \le x_{n+1} \le 1$ e $0 \le \sqrt{1-x_{n+1}^2} \le 1$ esiste $\alpha_n^n \in [0,\pi]$ tale che $cos\alpha_n^n = x_{n+1}$ e $sen\alpha_n^n = \sqrt{1-x_{n+1}^2}$ di conseguenza $\alpha_n^n$ è tale che:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)\sigma_1^{n-1}\left(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right) \\ ... \\ \left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)\sigma_n^{n-1}\left(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right) \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{n-1}\left(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right)sen\alpha_n^n \\ ... \\ \sigma_n^{n-1}\left(\alpha_1^n,...,\alpha_{n-1}^n\right)sen\alpha_n^n \\ cos\alpha_n^n \end{pmatrix}$$

Ma questa è proprio la definizione ricorsiva di $\vec{\sigma}^n$ che dunque è suriettiva su $S^n$ visto che $\forall\vec{x} \in S^n\ \exists\left\{\alpha_1^n,...,\alpha_n^n\right\} : \vec{\sigma}^n\left(\alpha_1^n,...,\alpha_n^n\right) = \vec{x}$.

## 2.3. Il caso bidimensionale

Considereremo ora più da vicino la struttura di $SO_2(R)$, ciò sarà utile come base per le dimostrazioni induttive che faremo nel seguito per descrivere $SO_n(R)$.
Dunque se $A \in SO_n(R)$ deve essere: ${}^tA \bullet A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$$

Da queste relazioni si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

E' facile risolvere tale sistema facendo alcune semplici considerazioni, innanzitutto dovendo essere $b^2 + d^2 = 1$ abbiamo che $(\exists\alpha \in [0,2\pi]) : d = cos\alpha$ e $b = sen\alpha$ dunque dovendo essere $ab + cd = 0$ si ha che $a = \pm k\, cos\alpha$ e $c = \mp k\, sen\alpha$, ma dall'ultima relazione otteniamo $ad - bc = 1$ dunque $a = cos\alpha$ e $c = -\, sen\alpha$.

Dunque la funzione $A(\alpha) = \begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ -\, sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ parametrizza tutto $SO_2(R)$.

## 2.4. Definizione della base ortonormale

Poniamo ora:

$$\vec{\omega}_1^n\left(\alpha_1^{n-1}\right) := \vec{\sigma}^{\,n-1}\left(\alpha_1^{n-1} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}\right)$$

..........................................................................................

$$\vec{\omega}_k^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) := \vec{\sigma}^{\,n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \alpha_2^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}\right)$$

..........................................................................................

$$\vec{\omega}_{n-2}^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-2}^{n-1}\right) := \vec{\sigma}^{\,n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \alpha_2^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-2}^{n-1} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{\omega}_{n-1}^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\right) := \vec{\sigma}^{\,n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \alpha_2^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{\omega}_n^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\right) := \vec{\sigma}^{\,n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \alpha_2^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\right)$$

Indicheremo le componenti di $\vec{\omega}_k^n$ nel modo seguente:

$$\vec{\omega}_k^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) := \begin{pmatrix} \left(\omega_k^n\right)_1\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) \\ \ldots \\ \left(\omega_k^n\right)_i\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) \\ \ldots \\ \left(\omega_k^n\right)_n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

## 2.5. Osservazione importante

Notiamo che per definizione $\forall k \le n-2$ abbiamo $\left(\omega_k^n\right)_i\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) = \left(\omega_k^{n-1}\right)_i\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right)$ per $i < n$ e $\left(\omega_k^n\right)_n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}\right) = 0$ (verificare), inoltre si ha:

$$\vec{\omega}_{n-1}^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\right) = \begin{pmatrix} cos\alpha_{n-1}^{n-1}\, \vec{\omega}_{n-1}^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-2}^{n-1}\right) \\ \hline -\, sen\alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_n^n\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\right) = \begin{pmatrix} sen\alpha_{n-1}^{n-1}\, \vec{\omega}_{n-1}^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-2}^{n-1}\right) \\ \hline cos\alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si invita il lettore a verificare quanto affermato, in quanto fondamentale ai fini delle dimostrazioni che daremo in seguito.

# *3. La funzione matriciale*

## 3.1. Definizione

Definiamo contestualmente la funzione matriciale $M^n\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right):=\left(\vec{\omega}_1^n ...\vec{\omega}_n^n\right)$.
Dimostreremo più avanti che tale funzione è a valori in $SO_n(R)$.
Riportiamo a titolo d'esempio le matrici $M^2\left(\alpha_1^1\right)$, $M^3\left(\alpha_1^2,\alpha_2^2\right)$, e $M^4\left(\alpha_1^3,\alpha_2^3,\alpha_3^3\right)$; si invita il lettore ad effettuare i calcoli necessari per ottenerle esplicitamente.

$$M^2\left(\alpha_1^1\right)=\begin{pmatrix} cos\alpha_1^1 & sen\alpha_1^1 \\ -sen\alpha_1^1 & cos\alpha_1^1 \end{pmatrix};$$

$$M^3\left(\alpha_1^2,\alpha_2^2\right)=\begin{pmatrix} cos\alpha_1^2 & sen\alpha_1^2\, cos\alpha_2^2 & sen\alpha_1^2\, sen\alpha_2^2 \\ -sen\alpha_1^2 & cos\alpha_1^2\, cos\alpha_2^2 & cos\alpha_1^2\, sen\alpha_2^2 \\ 0 & -sen\alpha_2^2 & cos\alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

$$M^4\left(\alpha_1^3,\alpha_2^3,\alpha_3^3\right)=\begin{pmatrix} cos\alpha_1^3 & sen\alpha_1^3\, cos\alpha_2^3 & sen\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, cos\alpha_3^3 & sen\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, sen\alpha_3^3 \\ -sen\alpha_1^3 & cos\alpha_1^3\, cos\alpha_2^3 & cos\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, cos\alpha_3^3 & cos\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, sen\alpha_3^3 \\ 0 & -sen\alpha_2^3 & cos\alpha_2^3\, cos\alpha_3^3 & cos\alpha_2^3\, sen\alpha_3^3 \\ 0 & 0 & -sen\alpha_3^3 & cos\alpha_3^3 \end{pmatrix}$$

A questo punto sarà certamente chiara la struttura delle matrici $M^n$ appena introdotte.
Dimostriamo ora per induzione che la matrice $M^n\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)$ è a valori in $SO_n(R)\forall n\in N$, ciò è vero per $n=2$, per $n>2$ dimostreremo che i vettori $\vec{\omega}_1^n,...,\vec{\omega}_n^n$ formano una base ortonormale.
Intanto $\left\|\vec{\omega}_k^n\right\|=\left\|\vec{\sigma}^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_k^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)\right\|=1\forall k\le n$ perché $\vec{\sigma}^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)\in S^{n-1}\ \forall\left\{\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right\}\in R^{n-1}$ come abbiamo già visto.
Sia dunque per ipotesi induttiva $\vec{\omega}_i^{n-1}\bullet\vec{\omega}_j^{n-1}=0\,\forall i\ne j$, abbiamo (si tenga bene a mente la definizione ricorsiva di $\vec{\sigma}^n$):

✓ Caso $(i\ne j)<n-2$

$$\vec{\omega}_i^n\bullet\vec{\omega}_j^n=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_i^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_j^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_i^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_j^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)sen^2\frac{\pi}{2}\right]+cos^2\frac{\pi}{2}=$$
$$=\vec{\omega}_i^{n-1}\bullet\vec{\omega}_j^{n-1}=0$$

✓ Caso $i\le n-2, j=n-1$

$$\vec{\omega}_i^{\,n} \bullet \vec{\omega}_{n-1}^{\,n} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_i^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_i^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-1}\right) sen\frac{\pi}{2}\, sen\left(\alpha_{n-1}^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)\right]+$$
$$+\, cos\frac{\pi}{2}\, cos\left(\alpha_{n-1}^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)=\vec{\omega}_i^{\,n-1}\bullet\vec{\omega}_{n-1}^{\,n-1}\, cos\alpha_{n-1}^{n-1}=0$$

✓ Caso $i \leq n-2, j=n$

$$\vec{\omega}_i^{\,n} \bullet \vec{\omega}_{n}^{\,n} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_i^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)=$$
$$=\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_i^{n-1}+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-1}\right) sen\frac{\pi}{2}\, sen\alpha_{n-1}^{n-1}\right]+$$
$$+\, cos\frac{\pi}{2}\, cos\alpha_{n-1}^{n-1}=\vec{\omega}_i^{\,n-1}\bullet\vec{\omega}_{n-1}^{\,n-1}\, sen\alpha_{n-1}^{n-1}=0$$

✓ Caso $i = n-1, j=n$

$$\vec{\omega}_{n-1}^{\,n} \bullet \vec{\omega}_{n}^{\,n} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)=$$
$$=\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-1}\right)\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-1}\right) sen\left(\alpha_{n-1}^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right) sen\alpha_{n-1}^{n-1}\right]+$$
$$+\, cos\left(\alpha_{n-1}^{n-1}+\frac{\pi}{2}\right) cos\alpha_{n-1}^{n-1}=\left(\vec{\omega}_{n-1}^{\,n-1}\bullet\vec{\omega}_{n-1}^{\,n-1}-1\right) sen\alpha_{n-1}^{n-1}\, cos\alpha_{n-1}^{n-1}=0$$

## 3.2. La funzione matriciale è a determinante positivo

Dimostriamo ora che $det\, M^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-1}\right)=1 \Rightarrow det\, M^{n}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)=1$.
Abbiamo (omettiamo gli argomenti delle funzioni):

$$\det M^n\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)=\det\left(\vec{\omega}_1^{\,n},...,\vec{\omega}_n^{\,n}\right)=\det\begin{pmatrix}\left(\omega_1^n\right)_1 & ... & \left(\omega_{n-2}^n\right)_1 & \left(\omega_{n-1}^n\right)_1 & \left(\omega_n^n\right)_1\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ \left(\omega_1^n\right)_i & ... & \left(\omega_{n-2}^n\right)_i & \left(\omega_{n-1}^n\right)_i & \left(\omega_n^n\right)_i\\ & ... & ... & ... & ...\\ \left(\omega_1^n\right)_n & ... & \left(\omega_{n-2}^n\right)_n & \left(\omega_{n-1}^n\right)_n & \left(\omega_n^n\right)_n\end{pmatrix}$$

ovvero:

$$= \det \begin{pmatrix} (\omega_1^{n-1})_1 & \dots & (\omega_{n-2}^{n-1})_1 & (\omega_{n-1}^{n-1})_1 \cos\alpha_{n-1}^{n-1} & (\omega_{n-1}^{n-1})_1 sen\alpha_{n-1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\omega_1^{n-1})_{n-1} & \dots & (\omega_{n-2}^{n-1})_{n-1} & (\omega_{n-1}^{n-1})_{n-1} \cos\alpha_{n-1}^{n-1} & (\omega_{n-1}^{n-1})_{n-1} sen\alpha_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -sen\alpha_{n-1}^{n-1} & \cos\alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(sen^2\alpha_{n-1}^{n-1} + \cos^2\alpha_{n-1}^{n-1}\right) \det \begin{pmatrix} (\omega_1^{n-1})_1 & \dots & (\omega_{n-1}^{n-1})_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\omega_1^{n-1})_{n-1} & \dots & (\omega_{n-1}^{n-1})_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(\vec{\omega}_1^{n-1}, \dots, \vec{\omega}_{n-1}^{n-1}\right) = \det M^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1}, \dots, \alpha_{n-2}^{n-1}\right) = 1$$

# *4. La parametrizzazione*

## 4.1. Definizione della parametrizzazione

Definiamo le matrici $M_k^n\left(\vec{\alpha}^{k-1}\right) = \left(\begin{array}{c:c} M^k\left(\alpha_1^{k-1}, \dots, \alpha_{k-1}^{k-1}\right) & N_{k,n-k} \\ \hdashline N_{n-k,k} & I_{n-k} \end{array}\right)$, ove

$\vec{\alpha}^k := \left\{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_k^k\right\}$

Possiamo definire ora la funzione $\Omega^n : [0,2\pi]^{n-1} \times [0,\pi]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \to SO_n(R)$ ponendo

$\Omega^n\left(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^{n-1}\right) := \prod_{k=2}^{n} M_{n-k+2}^n\left(\vec{\alpha}^{n-k+1}\right)$.

Così ad esempio $\Omega^4\left(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^3\right) = \prod_{k=2}^{4} M_{4-k+2}^4\left(\vec{\alpha}^{4-k+1}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} cos\alpha_1^3 & sen\alpha_1^3\, cos\alpha_2^3 & sen\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, cos\alpha_3^3 & sen\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, sen\alpha_3^3 \\ -sen\alpha_1^3 & cos\alpha_1^3\, cos\alpha_2^3 & cos\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, cos\alpha_3^3 & cos\alpha_1^3\, sen\alpha_2^3\, sen\alpha_3^3 \\ 0 & -sen\alpha_2^3 & cos\alpha_2^3\, cos\alpha_3^3 & cos\alpha_2^3\, sen\alpha_3^3 \\ 0 & 0 & -sen\alpha_3^3 & cos\alpha_3^3 \end{pmatrix} \bullet$$

$$\bullet \left(\begin{array}{ccc:c} cos\alpha_1^2 & sen\alpha_1^2\, cos\alpha_2^2 & sen\alpha_1^2\, sen\alpha_2^2 & 0 \\ -sen\alpha_1^2 & cos\alpha_1^2\, cos\alpha_2^2 & cos\alpha_1^2\, sen\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & -sen\alpha_2^2 & cos\alpha_2^2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \bullet \left(\begin{array}{cc:cc} cos\alpha_1^1 & sen\alpha_1^1 & 0 & 0 \\ -sen\alpha_1^1 & cos\alpha_1^1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

E' immediato verificare che le matrici $M_k^n\left(\vec{\alpha}^{k-1}\right)$ e $\Omega^n\left(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^{n-1}\right)$ sono ortogonali, per dimostrare che $\Omega^n$ parametrizza $SO_n(R)$ basta quindi far vedere che è suriettiva.

## 4.2. Suriettività della parametrizzazione

Per farlo mostreremo che data una base ortonormale destra $\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ di $R^n$ esistono $\{\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1}\}$ ovvero $\{\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_2^2,...,\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\}\in[0,2\pi]^{n-1}\times[0,\pi]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ tali che: $\Omega^n(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1})\bullet\vec{\mathrm{e}}_k=\vec{x}_k\ \forall k\in\{1,...,n\}$.

Ricordiamo che $M^2(\alpha_1^1)\equiv M_2^2(\alpha_1^1)\equiv\prod_{k=2}^{2}M_k^2(\alpha_1^1)=\Omega_2(\alpha_1^1)$, dunque, come abbiamo già visto, $\Omega^2$ è suriettiva su $SO_2(R)$.

Sia dunque $\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ una base ortonormale destra di $R^n$, si ha $\|\vec{x}_n\|=1$ dunque $\vec{x}_n\in S^{n-1}$, allora esistono $\{\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\}\in[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2}$ tali che $\vec{\sigma}^{n-1}(\vec{\alpha}^{n-1})=\vec{x}_n$.

Abbiamo pure $M^n(\vec{\alpha}^{n-1})\bullet\vec{\mathrm{e}}_n=\vec{\sigma}^{n-1}(\vec{\alpha}^{n-1})=\vec{x}_n$; notiamo che $M^n$ manda i vettori della base canonica $\vec{\mathrm{e}}_1,...,\vec{\mathrm{e}}_{n-1}$ in una base ortonormale destra contenuta nell'iperpiano ortogonale a $\vec{x}_n\equiv\vec{\sigma}^{n-1}(\vec{\alpha}^{n-1})$.

Viceversa ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))$ è tale che ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_n=\vec{\mathrm{e}}_n$ e ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_k\in span(\vec{\mathrm{e}}_1,...,\vec{\mathrm{e}}_{n-1})\forall k<n$ anche se in generale ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_k\neq\vec{\mathrm{e}}_k\forall k\neq n$.

Per mandare i vettori ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_1,...,{}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_{n-1}$ nei vettori di base $\vec{\mathrm{e}}_1,...,\vec{\mathrm{e}}_{n-1}$ basta applicare a sinistra la matrice ${}^t\left(\begin{array}{c|c}\Omega^{n-1}(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2}) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)$ alla ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))$; infatti la ${}^t\left(\begin{array}{c|c}\Omega^{n-1}(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2}) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)$ lascia invariato l'ultimo vettore riga di ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))$, ovverosia $\vec{x}_n\equiv\vec{\sigma}^{n-1}(\vec{\alpha}^{n-1})$, inoltre per ipotesi induttiva $\exists\{\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2}\}\in[0,2\pi]^{n-2}\times[0,\pi]^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$ tali che (con $\vec{\mathrm{e}}_k$ indichiamo indifferentemente il $k-esimo$ vettore di base canonica di $R^{n-1}$ e/o $R^n$):

$${}^t\left(\begin{array}{c|c}\Omega^{n-1}(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2}) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)\bullet\vec{\mathrm{e}}_k=\left(\begin{array}{c}\Omega^{n-1}(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2})\bullet\vec{\mathrm{e}}_k\\ \hline 0\end{array}\right)={}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_k\ \forall k<n$$

(ricordiamo che i vettori ${}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_1,...,{}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_{n-1}$, essendo ortogonali a $\vec{\mathrm{e}}_n$, hanno la $n-esima$ coordinata nulla).

Dunque, applicando a sinistra la matrice $M^n(\vec{\alpha}^{n-1})$ ad entrambi i membri dell'espressione precedente abbiamo:

$$M^n(\vec{\alpha}^{n-1})\bullet{}^t\left(\begin{array}{c|c}\Omega^{n-1}(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2}) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)\bullet\vec{\mathrm{e}}_k=M^n(\vec{\alpha}^{n-1})\bullet\left({}^t(M^n(\vec{\alpha}^{n-1}))\bullet\vec{x}_k\right)=\vec{x}_k\ \forall k<n$$

ma abbiamo anche:

$$M^n\left(\vec{\alpha}^{\,n-1}\right)\bullet {}^t\!\left(\begin{array}{c|c}\Omega^{n-1}\left(\vec{\alpha}^{\,1},\dots,\vec{\alpha}^{\,n-2}\right) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)=M^n\left(\vec{\alpha}^{\,n-1}\right)\bullet\prod_{k=3}^{n}M^n_{n-k+2}\left(\vec{\alpha}^{\,n-k+1}\right)=$$

$$=\prod_{k=2}^{n}M^n_{n-k+2}\left(\vec{\alpha}^{\,n-k+1}\right)=\Omega^n\left(\vec{\alpha}^{\,1},\dots,\vec{\alpha}^{\,n-1}\right)$$

dunque esistono $\left\{\vec{\alpha}^{\,1},\dots,\vec{\alpha}^{\,n-1}\right\}\in[0,2\pi]^{n-1}\times[0,\pi]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ tali che $\Omega^n\left(\vec{\alpha}^{\,1},\dots,\vec{\alpha}^{\,n-1}\right)\bullet\vec{\mathsf{e}}_k=\vec{x}_k$ $\forall k\in\{1,\dots,n\}$

# 5. Decomposizione in rotazioni piane

Dimostrata la suriettività di $\Omega^n$ ricaviamo un'ulteriore proprietà delle matrici $M^n$ che permetterà di esprimere qualunque rotazione in $R^n$ come composizione di rotazioni piane.

## 5.1. Matrici a blocchi

Introduciamo le matrici $P^n_k$:

$$P^n_k\left(\alpha^{n-1}_k\right):=\left(\begin{array}{c|cc|c} I_{k-1} & \multicolumn{2}{c|}{N_{k-1,2}} & N_{k-1,n-k-1}\\ \hline N_{2,k-1} & \cos\alpha^{n-1}_k & sen\,\alpha^{n-1}_k & N_{2,n-k-1}\\ & -sen\,\alpha^{n-1}_k & \cos\alpha^{n-1}_k & \\ \hline N_{n-k-1,k-1} & \multicolumn{2}{c|}{N_{n-k-1,2}} & I_{n-k-1}\end{array}\right)$$

Dimostriamo per induzione che $M^n\left(\vec{\alpha}^{\,n-1}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}P^n_k\left(\alpha^{n-1}_k\right)$; intanto ciò è banalmente vero per $n=2$ infatti $M^2\left(\alpha^1_1\right)=\prod_{k=1}^{1}P^2_k\left(\alpha^1_k\right)=P^2_1\left(\alpha^1_1\right)$.

Sia dunque la proposizione vera per $n-1$, e dimostriamola per $n$; abbiamo:

$$\prod_{k=1}^{n-1}P^n_k\left(\alpha^{n-1}_k\right)=\prod_{k=1}^{n-2}\left(\begin{array}{c|c}P^{n-1}_k\left(\alpha^{n-1}_k\right) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)\bullet P^n_{n-1}\left(\alpha^{n-1}_{n-1}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}M^{n-1}\left(\alpha^{n-1}_1,\dots,\alpha^{n-1}_{n-2}\right) & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & 1\end{array}\right)\bullet\left(\begin{array}{c|cc} I_{n-2} & \multicolumn{2}{c}{N_{n-2,2}}\\ \hline N_{2,n-2} & \cos\alpha^{n-1}_{n-1} & sen\alpha^{n-1}_{n-1}\\ & -sen\alpha^{n-1}_{n-1} & \cos\alpha^{n-1}_{n-1}\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}\vec{\omega}^{n-1}_1 & \dots & \vec{\omega}^{n-1}_{n-2} & \vec{\omega}^{n-1}_{n-1} & N_{n-1,1}\\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\bullet\left(\begin{array}{c|cc} I_{n-2} & \multicolumn{2}{c}{N_{n-2,2}}\\ \hline N_{2,n-2} & \cos\alpha^{n-1}_{n-1} & sen\alpha^{n-1}_{n-1}\\ & -sen\alpha^{n-1}_{n-1} & \cos\alpha^{n-1}_{n-1}\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccccc}\vec{\omega}^{n-1}_1 & \dots & \vec{\omega}^{n-1}_{n-2} & \cos\alpha^{n-1}_{n-1}\vec{\omega}^{n-1}_{n-1} & sen\alpha^{n-1}_{n-1}\vec{\omega}^{n-1}_{n-1}\\ \hline 0 & \dots & 0 & -sen\alpha^{n-1}_{n-1} & \cos\alpha^{n-1}_{n-1}\end{array}\right)=\left(\vec{\omega}^n_1\ \ \dots\ \ \vec{\omega}^n_n\right)=M^n\left(\vec{\alpha}^{\,n-1}\right)$$

## 5.2. La formula finale

È chiaro poi che $M_k^n\left(\vec{\alpha}^{k-1}\right)=\prod_{j=1}^{k-1} P_j^n\left(\alpha_j^{k-1}\right)$.

Ricordando ora che si ha $\Omega^n\left(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1}\right)=\prod_{k=2}^{n} M_{n-k+2}^n\left(\vec{\alpha}^{n-k+1}\right)$ e sostituendo in tale espressione quella di $M_k^n\left(\vec{\alpha}^{k-1}\right)=\prod_{j=1}^{k-1} P_j^n\left(\alpha_j^{k-1}\right)$ si ottiene la generalizzazione del teorema di Eulero a $SO_n(R)$:

$\Omega^n\left(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1}\right)=\prod_{k=2}^{n} M_{n-k+2}^n\left(\vec{\alpha}^{n-k+1}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n-k+1} P_j^n\left(\alpha_j^{n-k+1}\right)\right)$; il lettore può verificare personalmente come tale espressione coincida con quella data da Eulero per $SO_3(R)$.
Riportiamo a titolo di esempio la decomposizione di $\Omega^4\left(\alpha^1,\vec{\alpha}^2,\vec{\alpha}^3\right)$ in rotazioni piane:

$$\Omega^4\left(\alpha^1,\vec{\alpha}^2,\vec{\alpha}^3\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} cos\alpha_1^3 & sen\alpha_1^3 & 0 & 0 \\ -sen\alpha_1^3 & cos\alpha_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_2^3 & sen\alpha_2^3 & 0 \\ 0 & -sen\alpha_2^3 & cos\alpha_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\alpha_3^3 & sen\alpha_3^3 \\ 0 & 0 & -sen\alpha_3^3 & cos\alpha_3^3 \end{pmatrix} \bullet$$

$$\bullet \begin{pmatrix} cos\alpha_1^2 & sen\alpha_1^2 & 0 & 0 \\ -sen\alpha_1^2 & cos\alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_2^2 & sen\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & -sen\alpha_2^2 & cos\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} cos\alpha_1^1 & sen\alpha_1^1 & 0 & 0 \\ -sen\alpha_1^1 & cos\alpha_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. Un algoritmo per le matrici ortogonali

Diamo ora un algoritmo per decomporre una matrice ortogonale a determinante positivo nella forma appena ricavata; sia allora $B=\left(b_j^i\right)\in SO_n(R)$, ci proponiamo di trovare gli angoli $\left\{\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1}\right\}$ ovvero $\left\{\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_2^2,...,\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right\}\in[0,2\pi]^{n-1}\times[0,\pi]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ tali che si abbia $\Omega^n\left(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1}\right)=B$.

$$B:=\begin{pmatrix} b_1^1 & ... & b_{n-1}^1 & b_n^1 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_1^{n-1} & ... & b_{n-1}^{n-1} & b_n^{n-1} \\ b_1^n & ... & b_{n-1}^n & b_n^n \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che l'ultima colonna di $\Omega^n$ coincide con l'ultima di $M^n$, in quanto la moltiplicazione a destra per le matrici $M_k^n$ la lascia invariata.

In particolare l'ultimo vettore colonna di $M^n$ è $\vec{\omega}_n^n \equiv \vec{\sigma}^{n-1}$ dunque l'ultima colonna di $B$ dovrà essere uguale a: $\vec{\sigma}^{n-1}\left(\vec{\alpha}^{n-1}\right)=\begin{pmatrix}\sigma_1^{n-1}\\ \cdots\\ \sigma_{n-1}^{n-1}\\ \sigma_n^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sen\alpha_{n-1}^{n-1}\vec{\omega}_{n-1}^{n-1}\\ \hline cos\alpha_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_n^1\\ \cdots\\ b_n^{n-1}\\ b_n^n\end{pmatrix}$; supponiamo ora $\left|b_n^n\right|\neq 1$ (altrimenti avremo una matrice a blocchi $\left(\begin{array}{c|c}B' & N_{n-1,1}\\ \hline N_{1,n-1} & \pm 1\end{array}\right)$ e potremo quindi applicare il procedimento di seguito esposto a $B'$, moltiplicando preventivamente una riga o colonna di $B'$ per $-1$ nel caso $b_n^n=-1$ e quindi $B'\in O_n(R)\setminus SO_n(R)$).

Per le considerazioni sopra esposte dev'essere $b_n^n=\sigma_n^{n-1}\left(\vec{\alpha}^{n-1}\right)=cos\alpha_{n-1}^{n-1}$ con $\alpha_{n-1}^{n-1}\in[0,\pi]$ determinato univocamente da $\alpha_{n-1}^{n-1}=ar\,cos\,b_n^n$.

A questo punto essendo $\sigma_k^{n-1}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right)=sen\alpha_{n-1}^{n-1}\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-1}\right)$ per $k<n$ abbiamo:

$\sigma_k^{n-2}\left(\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-2}^{n-2}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{b_n^1}{sen\alpha_{n-1}^{n-1}}\\ \cdots\\ \dfrac{b_n^{n-1}}{sen\alpha_{n-1}^{n-1}}\\ \dfrac{b_n^n}{sen\alpha_{n-1}^{n-1}}\end{pmatrix}$; notando poi che $cos\alpha_{n-2}^{n-1}=\dfrac{b_n^{n-1}}{sen\alpha_{n-1}^{n-1}}$ ($sen\alpha_{n-1}^{n-1}\neq 0$ perché abbiamo supposto $\left|b_n^n\right|\neq 1$) e ricavando così $\alpha_{n-2}^{n-1}$ si può determinare $cos\alpha_{n-3}^{n-1}=\dfrac{b_n^{n-2}}{sen\alpha_{n-1}^{n-1}\,sen\alpha_{n-2}^{n-1}}$ con lo stesso metodo e le stesse considerazioni usate per $\alpha_{n-2}^{n-1}$; continuando mediante un procedimento "all'indietro" si possono determinare tutti i parametri $\left\{\alpha_1^{n-1},...,\alpha_{n-1}^{n-1}\right\}\in[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2}$, e di conseguenza $\vec{\sigma}^{n-1}\left(\vec{\alpha}^{n-1}\right)$ e $M^n\left(\vec{\alpha}^{n-1}\right)$ che da $\vec{\sigma}^{n-1}\left(\vec{\alpha}^{n-1}\right)$ è completamente descritta.

A questo punto, ricordando che si ha $\Omega^n\left(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-1}\right)=\prod_{k=2}^{n}M_{n-k+2}^n\left(\vec{\alpha}^{n-k+1}\right)$, basta moltiplicare $B$ a sinistra per la matrice $\left(M^n\right)^{-1}={}^t\left(M^n\right)$ appena ottenuta, ricavando così la matrice $\left(\begin{array}{c|c}\Omega^{n-1}\left(\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^{n-2}\right) & N_{1,n-1}\\ \hline N_{n-1,1} & 1\end{array}\right)={}^t\left(M^n\right)\bullet B$; applicando poi a ${}^t\left(M^n\right)\bullet B$ il medesimo procedimento usato per $B$, notando cioè come la $(n-1)-esima$ colonna della matrice formata dalle sue prime $n-1$ righe e colonne sia uguale a $\vec{\sigma}^{n-2}\left(\vec{\alpha}^{n-2}\right)$ si determinano $\left\{\alpha_1^{n-2},...,\alpha_{n-2}^{n-2}\right\}\in[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-3}$ dunque $M_{n-1}^n\left(\vec{\alpha}^{n-2}\right)$ e così via, fino a ricavare, sempre "all'indietro", $\alpha_1^1$ e $M_2^n\left(\alpha_1^1\right)$.

## *7. Considerazioni finali*

Per finire facciamo alcune considerazioni sul numero di parametri necessario per descrivere $SO_n(R)$; notiamo che abbiamo scomposto una rotazione di $R^n$ in $\frac{n(n-1)}{2}$ rotazioni piane, e che i piani ottenibili combinando a due a due gli $n$ vettori di base sono esattamente $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Per quanto riguarda $\Omega^n$ ricordiamo che essa è definita come prodotto da $n$ a $2$ delle funzioni $M_k^n(\bar{\alpha}^{k-1}): [0,2\pi] \times [0,\pi]^{k-2} \to SO_n(R)$, dunque è il prodotto di $n-1$ matrici aventi ciascuna un dominio del tipo $[0,2\pi] \times [0,\pi]^{k-2}$; dunque $\Omega^n$ avrà un dominio formato da $[0,2\pi]^{n-1}$ e da $[0,\pi]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ dunque dipende in tutto da $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri indipendenti.

Ancora, la condizione di ortogonalità per una matrice di ordine n è definita da $\frac{n(n+1)}{2}$ prodotti scalari dunque richiede $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ parametri indipendenti.